ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ)

1) Ένας πομπός εκπέμπει "0", "1" σε αναλογία 1 ανά 2. Ένας δέκτης σημάτων Δ1, παίρνει λανθασμένο σήμα σε 2% των περιπτώσεων, ενώ ένας δέκτης Δ2 σε 3% των περιπτώσεων. Ζητούνται:

α. Η πιθανότητα ώστε ο Δ1 να λάβει σήμα "0"

β. " " " Δ2 " " "1"

γ. Εάν ο Δ1 λάβει σήμα "0", και ο δεύτερος Δ2 λάβει σήμα "1", ποιος από τους Δ1, Δ2 είναι πιο αξιόπιστος;

ΛΥΣΗ

Έστω τα ενδεχόμενα:

K_0: ο Δ1 λαμβάνει σήμα "0"

Λ_1: ο Δ2 λαμβάνει σήμα "1"

Π_0: ο πομπός εκπέμπει σήμα "0"

Π_1: ο πομπός εκπέμπει σήμα "1"

α. Αναζητούμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου K_0. Αλλά, συγχρόνως θα πρέπει να πραγματοποιείται το Π_0 ή Π_1 (ασυμβίβαστα). Άρα, παίρνοντας Θ.Ο.Π.

$$P(K_0) = P(K_0|\Pi_0)P(\Pi_0) + P(K_0|\Pi_1)P(\Pi_1) \quad (1)$$

Αλλά, ο πομπός εκπέμπει σήματα σε αναλογία 1 ανά 2.

Έτσι, $P(\Pi_0) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ και άρα $P(\Pi_1) = \frac{2}{3}$.

Όταν ο πομπός εκπέμπει σήμα "0", η πιθανότητα ο $Δ_1$ να το λάβει σωστά είναι $P(K_0|Π_0) = 0{,}98$.

Ενώ, όταν ο πομπός εκπέμπει σήμα "1", η πιθανότητα ο $Δ_1$ να το λάβει λάθος είναι $P(K_0|Π_1) = 0{,}02$

Άρα, η (1) γίνεται:

$$P(K_0) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}98 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}02 = 0{,}34.$$

β. Μας ζητάει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $Λ_1$. Με όμοιο τρόπο με το (α)

ΘΟΠ: $P(Λ_1) = P(Λ_1|Π_0)\,P(Π_0) + P(Λ_1|Π_1)\,P(Π_0)$ (2)

Θα προκύψει ότι η (2) γίνεται:

$P(Λ_1) = 0{,}657$.

γ. Υπολογίζαμε την πιθανότητα που έχει κάθε δέκτης να λάβει το σωστό σήμα. Αν υποθέσουμε ότι:

ο δέκτης $Δ_1$ έλαβε σήμα "0", δεδομένου ότι ο πομπός έστειλε σήμα "0", τότε (Νόμος Bayes)

$$P(Π_0|K_0) = \frac{P(K_0|Π_0)\,P(Π_0)}{P(K_0)} = \frac{1/3\cdot 0{,}98}{0{,}34} = 0{,}96.$$

Αν υποθέσαμε ότι ο δέκτης $Δ_2$ έλαβε σήμα "1", δεδομένου ότι ο πομπός έστειλε σήμα "1", τότε όμοια με προηγουμένως (από Νόμο Bayes)

$$P(Π_1|Λ_1) = \frac{P(Π_1)\,P(Λ_1|Π_1)}{P(Λ_1)} = \frac{2/3\cdot 0{,}97}{0{,}657} = 0{,}984 > 0{,}96.$$

Άρα, πιο αξιόπιστος φαίνεται να είναι ο δέκτης $Δ_2$.

2) Σε μία κάλπη υπάρχουν $2n$ λευκά σφαιρίδια και $2n$ μαύρα σφαιρίδια. Αφαιρούμε $2n$ σφαιρίδια δίχως επανάθεση. Ζητούνται:

α. Η πιθανότητα να προκύψουν n λευκά και n μαύρα σφαιρίδια

β. Να προσεγγισθεί η παραπάνω πιθανότητα με βάση τον τύπο:

$n! \simeq e^{-n} \cdot n^n \sqrt{2\pi n}$ (Stirling)

και έπειτα να βρεθεί το όριό της για $n \to \infty$

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά στο κουτί έχουμε $\Sigma = 4n$ σφαιρίδια με $M = 2n$ μαύρα και $\Lambda = 2n$ λευκά. Είναι προφανές ότι πληρούνται τα κριτήρια της υπεργεωμετρικής κατανομής και άρα: η πιθανότητα της τ.μ. X που παριστάνει το πλήθος των λευκών σφαιριδίων που αφαιρέθηκαν από το κουτί. Έστω λοιπόν $\lambda = n$ λευκές και $\mu = n$ μαύρες που αφαιρέθηκαν από το κουτί. Έτσι:

$$P(X=\lambda) = \frac{\binom{\Lambda}{\lambda}\cdot\binom{M}{\mu}}{\binom{\Lambda+M}{\lambda+\mu}} = \frac{\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}}{\binom{4n}{2n}} =$$

$$= \frac{\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}}{\frac{(4n)!}{(2n)!(4n-2n)!}} = \frac{((2n)!)^4}{(n!)^4 \cdot (4n)!} = p.$$

β. $(n!)^4 \simeq (2\pi)^2 \cdot n^{4n+2} \cdot e^{-4n}$

$((2n)!)^4 \simeq (2\pi)^2 \cdot (2n)^{8n+2} \cdot e^{-8n}$

$(4n)! \simeq \sqrt{2\pi} \cdot (4n)^{4n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-4n}$

Άρα, η πιθανότητα του ρ(ς) γίνεται:

$$p = \frac{\cancel{4\pi^2} \cdot 2^{8n+2} \cdot n^{8n+2} \cdot e^{-8n}}{4\pi^2 \cdot n^{4n+2} \cdot e^{-4n} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot 2^{8n+1} \cdot n^{4n+1/2} \cdot e^{-4n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot \sim \lim_{n \to \infty} p = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} = 0$$

3) Προϊόν βιομηχανίας συσκευάζεται σε πακέτα. Το βάρος ενός πακέτου είναι η τ.μ. X οπου ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο (8,12) (Το βαρος μετριεται σε kgr). Το κοστος παραγωγής κάθε πακετου είναι η τ.μ Y που μετριεται σε δραχμές και εξαρτάται απο το βαρος X του πακετου βάσει της σχέσης: $Y = 0{,}1X + 100$
Εαν ένα πακετο έχει βάρος > 9 kgr πωλείται στις 150 δρχμ. Ενώ εαν είναι < 9 kgr πωλείται στις 80 δρχμ. Ζητείται η μέση τιμή του κερδους για κάθε ένα πακετο

ΛΥΣΗ

$X \sim U(8,12)$ τοτε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται ως εξής:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{12-8}, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

οπου x η τιμή του βάρους του πακέτου.

Το κόστος Υ του πακέτου είναι

$y = 0{,}1x + 100$

Για $x>9$ το κέρδος είναι:

$K_1(x) = 150 - (0{,}1x + 100)$ [έσοδα − έξοδα]

$K_1(x) = 50 - 0{,}1x$

Για $x<9$ το κέρδος είναι:

$K_2(x) = 80 - (0{,}1x + 100) = -0{,}1x - 20$

Άρα, $K(x) = \begin{cases} 50-0{,}1x, & x>9 \\ -20-0{,}1x, & x<9 \end{cases}$

Η μέση τιμή του κέρδους είναι:

$$E(K(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) f_X(x)\,dx = \int_{8}^{12} K(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_8^9 K_1(x) \cdot \frac{1}{4}\,dx + \int_9^{12} K_2(x) \cdot \frac{1}{4}\,dx =$$

$$= \int_8^9 \frac{1}{4}(50-0{,}1x)\,dx + \int_9^{12} -\frac{1}{4}(20+0{,}1x)\,dx = \ldots = 31 \text{ δρχ}$$

το αναμενόμενο κέρδος για κάθε πακέτο

4) Ένα εξάρτημα μιας μηχανής έχει διάρκεια X ώρες, που είναι η τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu=300$ ώρες και τυπική απόκλιση $\sigma=20$ ώρες.

α) Εάν διαθέταμε 20 τέτοια εξαρτήματα, να βρεθεί η πιθανότητα η μηχανή να δουλεύει τουλάχιστον 5800 ώρες.

β) Πόσα εξαρτήματα χρειάζονται ώστε με πιθανότητα ίση με 0,95 το σύστημα να δουλεύει τουλάχιστον 7500 ώρες;

ΛΥΣΗ

α) Έστω $X_1,\dots,X_{20}$ οι διάρκειες ζωής των 20 εξαρτ. Επίσης, $X_1,\dots,X_{20}$ ανεξ. & ισόνομες τμ. που ακολουθούν κατανομή με $\mu=300$ και $\sigma=20$.

Η συνολική διάρκεια λειτουργίας της μηχανής είναι

$$S = X_1+X_2+\dots+X_{20} = \sum_{i=1}^{20} x_i$$

Έτσι, από ΚΟΘ $S \sim N(20\mu, \sqrt{20\sigma^2}) = N(6000, 20\sqrt{20})$

Συνεπώς, $Z = \dfrac{S-20\mu}{\sigma\sqrt{20}} \sim N(0,1)$.

Άρα,

$$P(S \geq 5800) = P\left(\frac{S-20\mu}{\sigma\sqrt{20}} \geq \frac{5800-20\mu}{\sigma\sqrt{20}}\right) = P(Z \geq -2{,}24) =$$

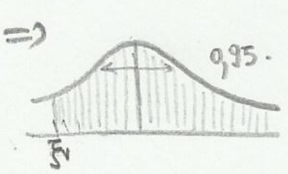
$$\overset{\text{συμμετρ}}{=} P(Z \leq 2{,}24) \overset{\text{Πίνακας}}{=} 0{,}98745.$$

β) Έστω n τα απαραίτητα εξαρτήματα.

Δίνεται $P(X_1+\dots+X_n = S_n \geq 7500) = 0{,}95 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_n - n\cdot 300}{20\sqrt{n}} \geq \frac{7500-n\cdot 300}{20\sqrt{n}}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z_n \geq \frac{7500-n\cdot 300}{20\sqrt{n}}\right) = 0{,}95.$$



τότε $\quad z_v = \dfrac{7500 - n \cdot 300}{20\sqrt{n}} < 0$

από τον πίνακα της τυπ. κανονικής κατανομής

$-z_v = 1{,}645 \Rightarrow z_v = -1{,}645$.

Άρα $\quad z_v = -1{,}645 = \dfrac{7500 - n \cdot 300}{20\sqrt{n}} \Rightarrow 300n - 32{,}9\sqrt{n} - 7500 = 0$

Επιλύοντας την εξίσωση βρίσκουμε ρίζες:

$w_1 = 5{,}055$ και $w_2 = -4{,}946$ (Απορ)

άρα $n = 5{,}055^2 = 25{,}55$ και επιλέγουμε το

άνω ακέραιο μέρος, άρα $n = 26$ προαπαιτούμενα.